Úkol č. 5

úterý 23. listopadu 2021 9:51

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} e^{-nx}}_{= a_n}$$

- řada konverguje bodově pro $x \in [0, \infty)$
  - na $(-\infty, 0)$ neplatí nutná podmínka ($a_n \to \infty$)
  - pro $x = 0$ dostáváme řadu $\sum (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$

    $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ konverguje podle Dirichletova kritéria ($(-1)^n$ má omezené částečné součty, $\frac{1}{\sqrt[100]{n}} \searrow 0$)

    $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \frac{n-1}{n+1}$ konverguje podle Abelova kritéria ($\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ konverguje, $\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \nearrow 1$)
  - na $(0, \infty)$ konverguje řada dokonce absolutně (srovnáním s $\sum e^{-nx}$)
- $\sum a_n \rightrightarrows$ na $[0, \infty)$
  - $a_n \rightrightarrows 0$ takže nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady platí ($|a_n| \leq \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \to 0$)

- snadno taky nahlédneme, že $\sum a_n \rightrightarrows$ na $[a,\infty)$ pro $a>0$ $\left(|a_n| \le e^{-an} \text{ a } \sum e^{-an} < \infty\right)$
  platí tedy $\sum a_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(0,\infty)$
- platí ale dokonce $\sum a_n \rightrightarrows$ na $[0,\infty)$, k tomu opět použijeme Abelovo a Dirichletovo kritérium (v stejnoměrné verzi)
  - $\sum (-1)^n \underbrace{\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}}_{=\alpha_n}$ konverguje podle výše uvedeného, tedy konverguje stejnoměrně (nezávisí na x) na $\mathbb{R}$.
  - posloupnost $\underbrace{\{e^{-nx}\}}_{=\beta_n}$ je stejně omezená na $[0,\infty)$ $\left(|e^{-nx}| \le 1 \quad x \in [0,\infty), n \in \mathbb{N}\right)$ a $e^{-nx} \searrow$ na $[0,\infty)$

Podle stejnoměrného Abelova kritéria tedy platí

$$\sum a_n = \sum \alpha_n \beta_n \rightrightarrows \text{ na } [0,\infty).$$